



e mërkurë, 15. korrik 2026

Problem 1. Në dërrasën e zezë janë shkruar 2026 numra të plotë më të mëdhenj se 1, jo detyrimisht të ndryshëm. Në një lëvizje, Gjergji zgjedh dy numra të plotë $m > 1$ dhe $n > 1$ nga vende të ndryshme në dërrasën e zezë dhe i zëvendëson ata me

$$\text{pmp}(m, n) \quad \text{dhe} \quad \frac{\text{shvp}(m, n)}{\text{pmp}(m, n)}.$$

Ai vazhdon të kryejë lëvizje për sa kohë që është e mundur.

(a) Provoni që, pavarësisht zgjedhjeve të Gjergjit, mbas një numri të fundëm lëvizjesh, do të mbetet ekzaktësisht një numër M në dërrasën e zezë më i madh se 1.

(b) Provoni që vlera e numrit M nuk varet nga zgjedhjet e Gjergjit.

(Shënim: Me $\text{pmp}(x, y)$ shënojmë pjesëtuesin më të madh të përbashkët të x dhe y , dhe me $\text{shvp}(x, y)$ shënojmë shumëfishin më të vogël të përbashkët të x dhe y .)

Problem 2. Jepet trekëndëshi ABC . Pikat M dhe N janë meset e brinjëve AB dhe AC përkatësisht. Le të jenë pikat K dhe L në brendësi të trekëndëshave BMC and BNC përkatësisht, të tilla që K ndodhet në brendësi të trekëndëshit ABL dhe L ndodhet në brendësi të trekëndëshit AKC . Supozojmë që

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{dhe} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Le të jetë O qendra e rrethit të jashtëshkruar të trekëndëshit AKL . Provoni që $OM = ON$.

Problem 3. Le të jetë n një numër i plotë pozitiv. Anri dhe Redi kanë një shkop me gjatësi 1 dhe duan ta ndajnë midis tyre. Anri shënon të shumtën n pika te shkopi dhe më pas Redi shënon të shumtën n pika te shkopi. Të gjitha pikat e shënuara janë të ndryshme. Më pas, shkopi ndahet te pikat e shënuara, duke krijuar kështu disa copa. Pastaj, ata zgjedhin me radhë, një herë njëri, një herë tjetri, copat e pazgjedhura. Anri nis i pari. Qëllimi i të dy lojtarëve është që të maksimizojnë gjatësinë totale të copave të tyre. Për çdo n , gjeni vlerën më të madhe c të tillë që Anri mund të garantojë që gjatësia totale e copave të shkopi të jetë të paktën c , pavarësisht se si luan Redi.



e enjte, 16. korrik 2026

Problem 4. Arlindi dhe Beniada po luajnë një lojë. Le të jetë θ një kënd ku $0^\circ < \theta < 180^\circ$ dhe θ dihet nga të dy lojtarët. Si fillim, Arlindi pret një trekëndësh prej letre $\mathcal{T}$ në përmasat që ai dëshiron. Më pas, ata ndjekin hapat e mëposhtëm në mënyrë të përsëritur:

- Nëse $\mathcal{T}$ ka të paktën një kënd θ , atëherë loja mbaron dhe Beniada fiton.
- Përndryshe, Beniada zgjedh një pikë P në perimetrin e $\mathcal{T}$ të ndryshme nga tre kulmet e trekëndëshit. Pastaj ajo pret trekëndëshin $\mathcal{T}$ nga pika P deri te kulmi i trekëndëshit përballë kësaj pike, duke e ndarë në dy trekëndësha.
- Arlindi heq një nga dy trekëndëshat. Trekëndëshi i mbetur bëhet $\mathcal{T}$ i ri.

Për cilat vlera reale të θ , Beniada mund të fitojë në një numër të fundëm hapash, pavarësisht se si luan Arlindi?

Problem 5. Le të jetë $\mathbb{R}_{>0}$ bashkësia e numrave realë pozitivë. Gjeni të gjitha funksionet $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ të tilla që

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

për çdo $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problem 6. Jepet vargu i pafundëm $a_1, a_2, a_3, \dots$ me numra të plotë pozitivë më të mëdhenj se 1. Për çdo numër të plotë pozitiv n , numri a_{n+1} është numri i plotë pozitiv më i vogël që është më i madh se a_n me vetinë që $\text{pmp}(a_{n+1}, a_i) > 1$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Proveni që ekzistojnë numrat e plotë pozitivë T dhe L të tillë që

$$a_{n+T} = a_n + L$$

për çdo numër të plotë pozitiv n . (Shënim: Me $\text{pmp}(x, y)$ shënojmë pjesëtuesin më të madh të përbashkët të x dhe y .)